



GARA DI MATEMATICA PER IL PUBBLICO

23.esima edizione

Palazzetto dello Sport Gianni Asti (Pala Ruffini)

Venerdì 6 marzo 2026

Problema 1 – Sottrazioni circolari

30 punti

Su una circonferenza si distribuiscono in ordine casuale i numeri interi da 1 a 5. Si scelgono poi, casualmente, due numeri tra loro vicini e si sostituisce la coppia con la loro differenza assoluta. Si procede in questo modo con mosse successive, scegliendo ogni volta una coppia di numeri vicini e sostituendoli con la loro differenza assoluta, fino a che sulla circonferenza non rimanga un unico numero. Quali sono i possibili valori che può assumere il numero finale? Indicare nella risposta la loro somma.

Soluzione:

Si osserva che sostituendo una coppia di numeri con la loro differenza assoluta rimane invariata la parità/disparità della somma totale degli elementi dell'insieme. Poiché $1+2+3+4+5=15$, numero dispari, procedendo nelle progressive sostituzioni la somma dei numeri rimasti dovrà mantenersi dispari (es: sostituendo 5 e 3 con la loro differenza 2, la somma sarà $1+2+4+2=9$, sempre dispari).

Di conseguenza il numero finale dovrà necessariamente essere dispari.

Inoltre, poiché $|a - b| \leq \max\{a, b\}$ nessuna mossa potrà generare un numero maggiore di 5.

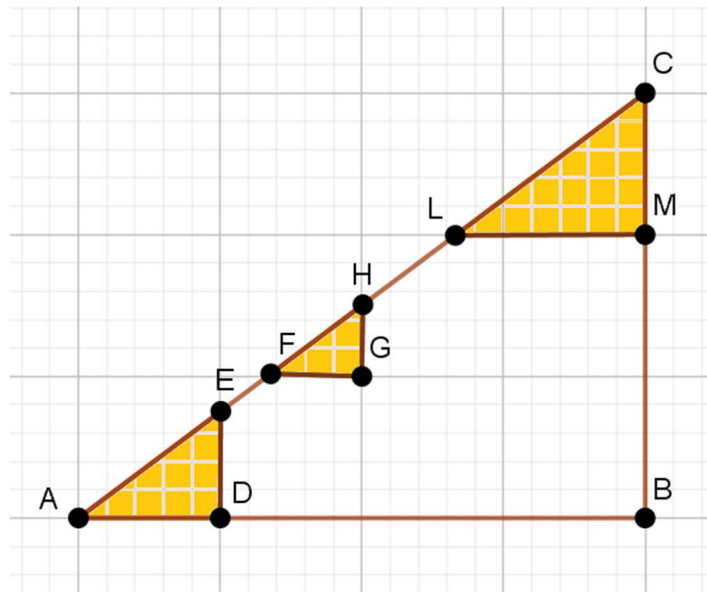
Gli unici risultati possibili sono dunque 1, 3, 5. Risulta semplice trovare almeno una sequenza di passaggi per ottenere ognuno di questi risultati finali. La risposta è dunque $1+3+5=9$.

Risposta **0009**

Problema 2 – Triangolini

30 punti

Abbiamo un triangolo rettangolo ABC di misure $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 3$ e $\overline{AC} = 5$. Vedi figura. Esso è disegnato su un foglio a quadretti di lato 1. Si chiede quanto valga l'area totale dei tre triangolini rettangoli individuati dall'ipotenusa che interseca la griglia quadrettata e da segmenti paralleli ai cateti AB e BC, come da figura: ADE, FGH e LMC. Si dia come risposta il valore dell'area citata moltiplicato per 1000.



Soluzione:

Notiamo subito che tutti i triangoli rettangoli con cui abbiamo a che fare sono simili tra loro.

L'area di ABC vale: $\frac{4 \times 3}{2} = 6$. Quindi l'area di ADE, avendo a che fare con dimensioni che valgono

1/4 di quelle di ABC, sarà $\frac{6}{4^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Notiamo ora che le dimensioni di FGH sono 1/6 di quelle di ABC. Infatti H è punto medio di AC quindi la lunghezza di HG è metà quadretto, quindi 1/2. L'area di FGH vale quindi: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Infine le dimensioni di LMC sono 1/3 di quelle di ABC, per cui la sua area vale $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Area totale richiesta: $\frac{3}{8} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{9+4+16}{24} = \frac{29}{24} = 1,208\bar{3}$.

Moltiplicando per 1000 si trova: $1208,3$.

Risposta **1208**

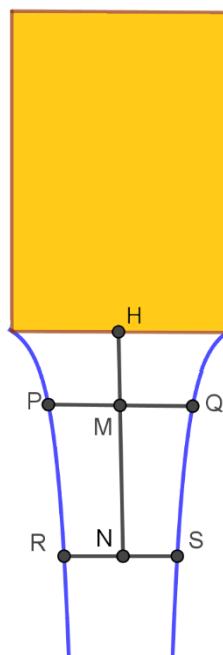
Problema 3 – Flusso di un liquido

40 punti

Da un contenitore di forma cilindrica viene rovesciato un liquido “ideale”. Il suo flusso è in direzione verticale, non ha altre accelerazioni se non quella di gravità di $9,8 \text{ m/sec}^2$ ed è inizialmente fermo nel contenitore stesso. Quanto misura l'area (in dm^2) della sezione circolare del tubo di flusso creato dal liquido nella sua caduta dopo 3 dm , sapendo che il raggio della sezione dopo 1 dm è proprio 1 dm ? Dare come risposta il numero formato dalle prime quattro cifre significative del risultato omettendo l'eventuale virgola. Porre $\pi = 3,1416$.

Soluzione:

In figura viene rappresentato il flusso del liquido in caduta.



Si ha, secondo le indicazioni del testo, $\overline{HM} = \overline{PM} = 1 \text{ dm}$, $\overline{HN} = 3 \text{ dm}$.

Si sa (come la fisica insegna: Principio di CASTELLI) che, in condizioni di regime, la portata di un condotto è costante in tutte le sue sezioni. È costante quindi il prodotto fra l'area della sezione attraversata e la velocità del fluido in questione.

La velocità di un corpo in caduta (moto uniformemente accelerato) con velocità iniziale nulla è $v = \sqrt{2gs}$, dove g è l'accelerazione di gravità ed s lo spazio percorso. L'area della sezione attraversata è pari all'area di un cerchio.

Abbiamo quindi $\sqrt{2 \cdot 98 \cdot 1} \cdot \pi \cdot 1 = \sqrt{2 \cdot 98 \cdot 3} \cdot \pi \cdot x^2$, dove x è la lunghezza del raggio RN in dm.

Troviamo $x^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Infine:

$$\text{Area cerchio di raggio RN} = \pi \cdot x^2 = 3,1416 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 1,0472\sqrt{3} \cong 1,8138.$$

Risposta **1813**

Problema 4 – Escape room

40 punti

Per uscire da una escape room devi inserire in una macchina una sequenza ordinata di 5 colori facendo attenzione a rispettare le regole scritte sulla parete:

“Solo i colori rosso, verde e blu dovrai usare... qualcuno più di una volta ma nessuno per più di due volte e, attenzione, mai dovrai affiancare due colori uguali!”.

Quante diverse sequenze sono possibili?

Soluzione 1:

Possiamo rappresentare le sequenze possibili come permutazioni dell'insieme $\{A, A, B, B, C\}$, dove

A e B sono i colori ripetuti due volte: $\frac{5!}{2!2!} = 30$. A queste permutazioni dobbiamo sottrarre quelle

che hanno le due A vicine, che sono $\frac{4!}{2!} = 12$, quelle che hanno le due B vicine, altrettante 12, e

considerare che ce sono 6 che hanno sia le A che le B vicine ($AABBC$, $CAABB$, $AACBB$, $BBAAC$, $CBBA$, $AABBC$, calcolabili come $3!$), che abbiamo considerato 2 volte. Le permutazioni totali da considerare sono dunque $30 - 12 - 12 + 6 = 12$. Ogni permutazione va poi moltiplicata per 3 possibili scelte di colori (basta scegliere tra le 3 possibilità un unico colore che non viene ripetuto), per un totale di $12 \cdot 3 = 36$ diverse sequenze possibili.

Soluzione 2:

Consideriamo anche qui inizialmente l'insieme $\{A, A, B, B, C\}$. Possono presentarsi questi casi:

$ABAB$, $BABA$, $BAAB$, $ABBA$ con C che si colloca in 5 modi nei primi due casi e in un solo modo (al centro) negli altri due. Esempio (1° caso): $CABAB$, $ACBAB$, $ABCAB$, $ABACB$, $ABABC$. Terzo caso: $BACAB$. In totale 12 possibilità. Poiché le scelte dei colori sono 3, si ha $12 \times 3 = 36$.

Risposta **0036**

Problema 5 – Ricoprimento

45 punti

Andrea si è procurato delle strisce di carta di varia lunghezza, ma di larghezza 1. Si diverte a coprire una figura rappresentante un triangolo rettangolo di lati lunghi rispettivamente 3, 4, 5 senza pieghe né sovrapposizioni. Dapprima dispone le strisce parallelamente ai cateti - quindi in due modi - poi parallelamente all'ipotenusa cercando di minimizzare l'area della carta utilizzata. Andrea può tagliare le strisce della lunghezza voluta purché sia maggiore o uguale a 1. In quale dei modi ha consumato più carta? Dare come risposta il valore dell'area della carta sprecata (cioè che cade fuori dal triangolo) nel modo citato utilizzando il numero formato dalle prime quattro cifre del risultato moltiplicato per 1000.

Soluzione:

Ecco la situazione grafica.

Fig.1

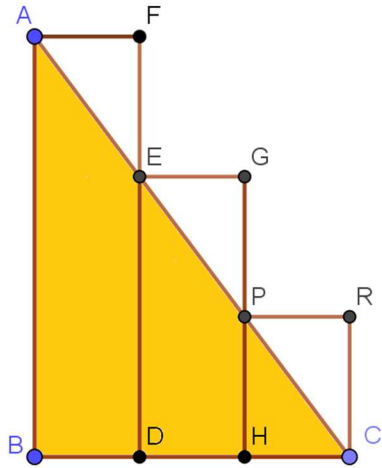


Fig.2

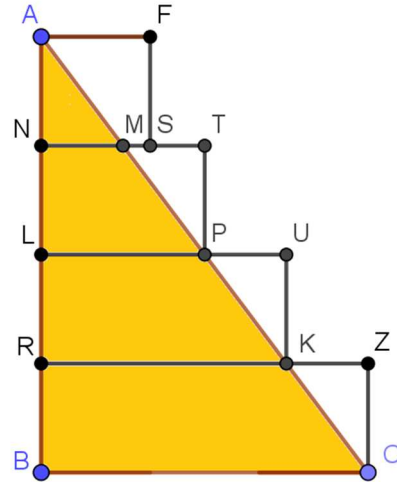


Fig. 3

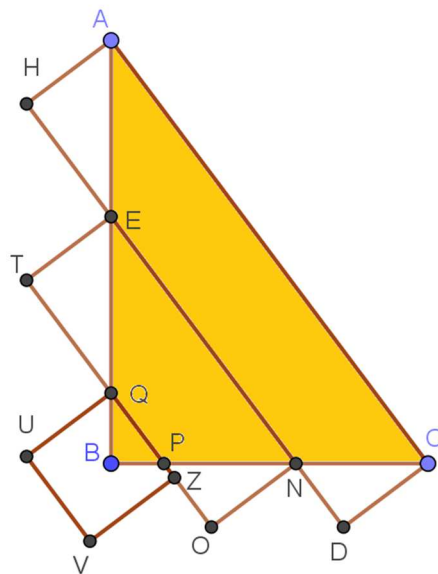


Figura 1.

L'area del triangolo ABC, come si può facilmente calcolare, vale 6. L'area del ricoprimento, che è la somma delle aree di tre rettangoli, vale $4 \cdot 1 + \frac{8}{3} \cdot 1 + \frac{4}{3} \cdot 1 = 8$ (tenendo conto di triangoli simili, ecc.).

L'area "sprecata" sarà $8 - 6 = 2$.

Figura 2.

Area rettangolo BCZR = 3. Area rettangolo NSFA = 1.

La lunghezza di RK, per motivi di similitudine, sarà $9/4$. Quella di LP sarà $3/2$.

$$\text{Area ricoprimento} = 3 + 1 + \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{31}{4} = 7,75. \text{ Area "sprecata"} = 1,75 < 2.$$

Figura 3.

Area rettangolo DCAH = 5.

Per questioni di similitudini si trova $\overline{NC} = 5/4$, $\overline{ND} = 3/4$, quindi $\overline{BN} = 3 - 3/8 = 21/8$.

$$\text{Ancora: } \overline{EB} = \frac{4}{3} \cdot \frac{21}{8} = \frac{7}{2} = 3,5. \text{ Avremo: area rettangolo ONET} = 3,5.$$

Area ricoprimento = $5 + 1 + 3,5 = 9,5$. Infine: area "sprecata" = $9,5 - 6 = 3,5$.

È quest'ultima l'area maggiore della carta sprecata.

Risposta **3500**

Problema 6 – Caso 2026 per l'ispettore di M. Smullyan

45 punti

In un caso di furto sono coinvolti quattro imputati, A, B, C, D. Vengono accertati i seguenti quattro fatti:

- 1) Se A e B sono entrambi colpevoli, allora C è innocente.
- 2) Se A è colpevole, almeno uno, tra B e D, è stato suo complice.
- 3) Se B e D sono colpevoli, allora A è innocente.
- 4) Se D è colpevole, lo è anche A.

Alla luce dei suddetti fatti, calcolare la probabilità $P(B)$ che B sia colpevole. Si ipotizzi l'equiprobabilità degli eventi elementari che verranno individuati.

Dare come risposta la parte intera di $1000 \times P(B)$ con eventuale approssimazione per difetto.

Soluzione:

Formalizziamo dapprima le frasi.

Si intenda $A = \text{"A è colpevole"}$, ecc. $0 = \text{FALSO}$

$\neg A = \text{"A è innocente"}$, ecc. $1 = \text{VERO}$

Avremo:

- 1) $(A \wedge B) \rightarrow (\neg C)$
- 2) $A \rightarrow (B \vee D)$
- 3) $(B \wedge D) \rightarrow (\neg A)$
- 4) $D \rightarrow A$

Costruiamo la tavola di verità:

	A	B	C	D	nA	nC	A∧B	B∨D	B∧D	n(A∧B)	n(B∧D)	1 (A∧B)⇒nC	2 A⇒(B∨D)	3 (B∧D)⇒nA	4 D⇒A	
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0			1	1	1	1	x
2	0	0	0	1	1	1	0	1	0			1	1	1	0	
3	0	0	1	0	1	0	0	0	0			1	1	1	1	x
4	0	0	1	1	1	0	0	1	0			1	1	1	0	
5	0	1	0	0	1	1	0	1	0			1	1	1	1	x
6	0	1	0	1	1	1	0	1	1			1	1	1	0	
7	0	1	1	0	1	0	0	1	0			1	1	1	1	x
8	0	1	1	1	1	0	0	1	1			1	1	1	0	
9	1	0	0	0	0	1	0	0	0			1	0	1	1	
10	1	0	0	1	0	1	0	1	0			1	1	1	1	x
11	1	0	1	0	0	0	0	0	0			1	0	1	1	
12	1	0	1	1	0	0	0	1	0			1	1	1	1	x
13	1	1	0	0	0	1	1	1	0			1	1	1	1	x
14	1	1	0	1	0	1	1	1	1			1	1	0	1	
15	1	1	1	0	0	0	1	1	0			0	1	1	1	
16	1	1	1	1	0	0	1	1	1			0	1	0	1	

Poiché i fatti (1), (2), (3), (4), sono stati accertati (quindi supposti “veri”), considerando quindi solo le righe (in rosso su sfondo giallo) della tabella corrispondenti alle situazioni in cui tutte le 4 frasi hanno valore di verità 1, si nota che, nei riguardi di B, si hanno 3 casi su 7 complessivi (considerati “equiprobabili”, date le nostre informazioni).

La probabilità cercata è quindi $P(B) = 3/7 \cong 0,4285714$ da cui $1000 \times P(B) \cong 428$.

Risposta **0428**

Problema 7 – Equazione infinita

45 punti

Sai trovare la soluzione dell’equazione infinita:

$$\sqrt{2026 - x\sqrt{2026 - x\sqrt{2026 - x\sqrt{2026 - \dots}}}} = x$$

Scrivi la soluzione indicando le prime 4 cifre del risultato (troncando e omettendo la virgola decimale).

Soluzione:

Si osserva che l’argomento della radice richiama ricorsivamente se stesso, per cui la radice quadrata infinita nella radice principale può essere sostituita con x :

$$\sqrt{2026 - x \cdot x} = x \Rightarrow 2026 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 1013 \Rightarrow x = \sqrt{1013} \approx 31,82766$$

Risposta **3182**

Problema 8 – Terna speciale

45 punti

Sono dati tre numeri interi positivi diversi da 1: x, y, z .

Essi sono tali che $xy + z = 2026$ e $x + yz = 2027$.

Trovare il valore di z .

Soluzione:

Sommando membro a membro le due uguaglianze si trova:

$x + xy + z + yz = 4053$. Quindi $x(y + 1) + z(y + 1) = 4053$. Infine $(x + z)(y + 1) = 4053$.

Scomponendo in fattori primi il numero 4053 si ha

$$(x + z)(y + 1) = 3 \cdot 7 \cdot 193.$$

Vi sono sei possibilità: il valore di $y + 1$ può essere: 3, 7, 193, 21, 579, 1930, cioè uno dei fattori primi trovati oppure il prodotto di due di essi.

Ipotizziamo che sia $y + 1 = 3$, cioè $y = 2$.

Otteniamo $x + z = 1351$, da cui $z = 1351 - x$. Sostituendo nella prima uguaglianza del testo si ha

$2x + 1351 - x = 2026$ da cui $x = 675$. Infine $z = 1351 - 75 = 676$.

Provando con le altre ipotesi non si ottengono numeri interi, quindi la soluzione è quella di cui sopra.

Risposta 0676

Problema 9 – Gran Premio 2026

50 punti

Su un foglio a quadretti è riportato il tracciato di una pista automobilistica sulla quale si immagina disputarsi un Gran Premio. Il gioco si svolge così (vedi figura 1): a cominciare dalla linea di partenza/arrivo AB, in senso orario, si tracciano dei segmenti formando una spezzata il cui ultimo tratto tocca/taglia il traguardo. Ogni tratto parte e arriva al vertice di un quadretto. Il primo tratto, a partire da P, ricalca il lato di un quadrettino. I successivi tratti vengono realizzati così: si considera il prolungamento del tratto; il suo estremo è il punto comune a quattro quadretti; si unisce l'ultimo punto individuato ad un vertice di uno dei suddetti quadretti (figura 2). Si riesce così ad “accelerare” e a “rallentare” o a proseguire con “velocità” costante. Non si può uscire di pista, pena squalifica, né toccare il bordo: bisogna rimanere all'interno del percorso.

Qual è il numero minimo di segmenti, nella fattispecie, che consente di toccare/tagliare il traguardo?

Figura 1

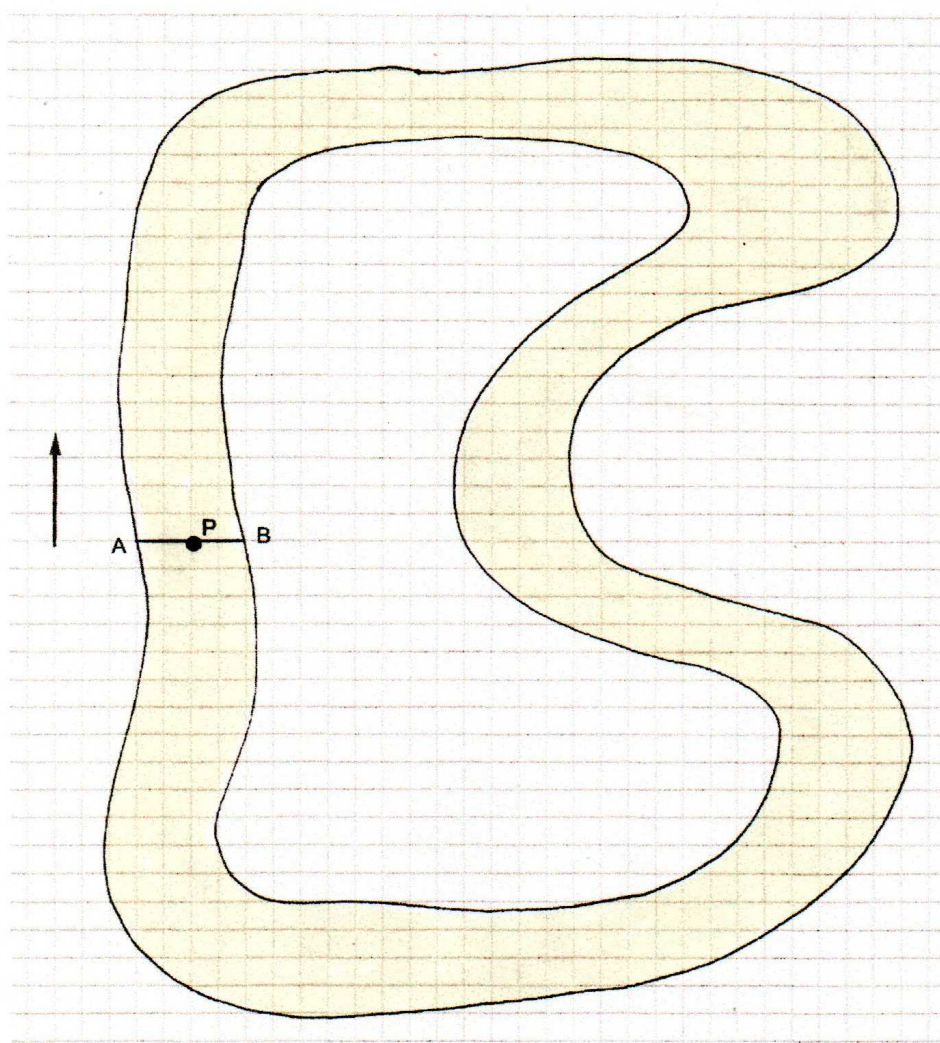
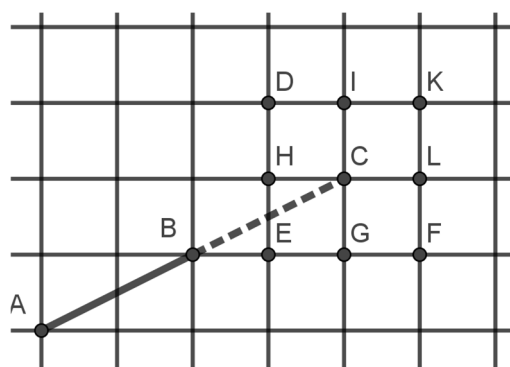


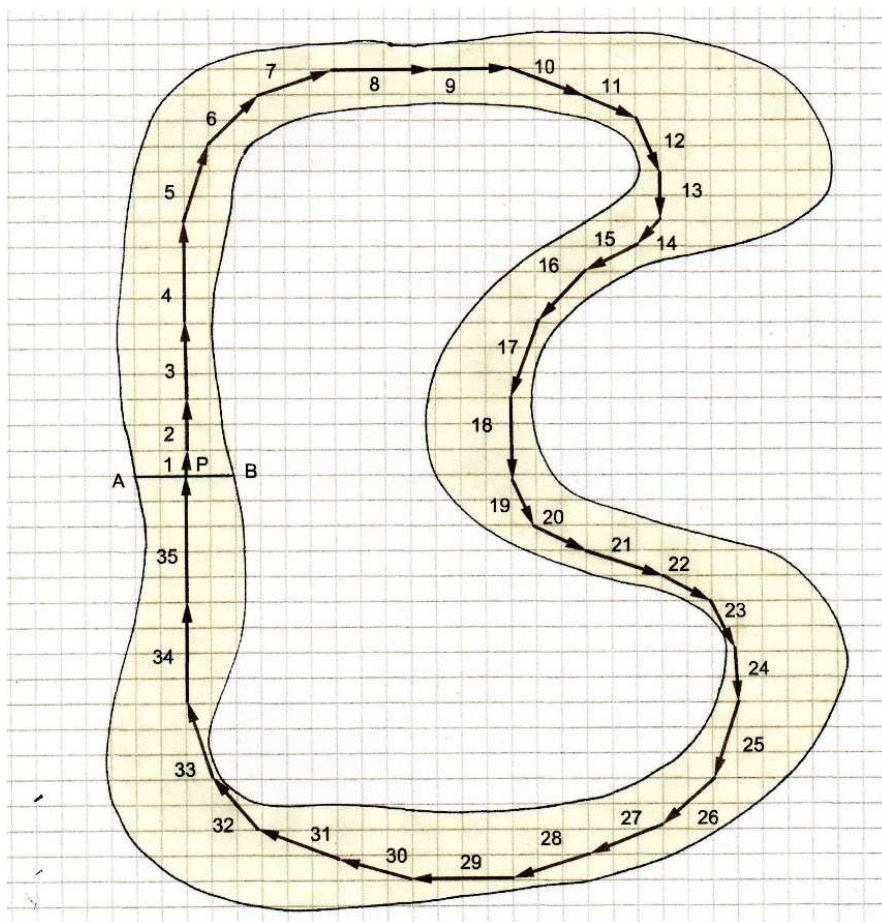
Figura 2



Sia, ad esempio, AB l'ultimo tratto. Da B si immagina di arrivare a C "ripetendo", sulla stessa direzione, l'ultimo segmento e si sceglie uno dei 9 punti (C, E, G, F, L, K, I, D, H) a cui congiungere B.

Soluzione:

Ecco una possibile soluzione “minimale”:



Risposta 0035

Problema 10 – Triangolo particolare

50 punti

Un triangolo è tale per cui le misure dei suoi lati sono numeri interi in progressione aritmetica di ragione 2. Non è rettangolo e pure la sua area ha come misura un numero intero. Sapendo che il perimetro è dato da un numero compreso fra 70 e 90, estremi esclusi, trovare le misure dei suoi lati. Dare come risposta il numero di quattro cifre composto dai valori del lato minore e del lato intermedio nell'ordine (contenente eventuali zeri iniziali).

Soluzione:

Poiché la ragione è 2 e la somma dei tre numeri in progressione aritmetica deve essere maggiore di 70 e minore di 90, il termine centrale può variare solo fra 24 e 29, estremi compresi. Infatti:

$$21 + 23 + 25 = 69 < 70 \quad e \quad 28 + 30 + 32 = 90, \text{ non accettabile.}$$

Abbiamo quindi da considerare le terne:

$$(22, 24, 26), (23, 25, 27), (24, 26, 28), (25, 27, 29), (26, 28, 30), (27, 29, 31).$$

Per calcolare l'area del triangolo utilizziamo la formula di Erone:

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, dove p è la lunghezza del semiperimetro del triangolo in questione e a, b, c le lunghezze dei suoi lati.

Provando le varie ipotesi si trova che l'unica la quale verifica la richiesta del quesito è la terna (26, 28, 30). Infatti:

$$A = \sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = \sqrt{112896} = 336, \text{ numero intero.}$$

In alternativa si può ragionare così. Poniamo uguale a x il termine centrale. Otteniamo

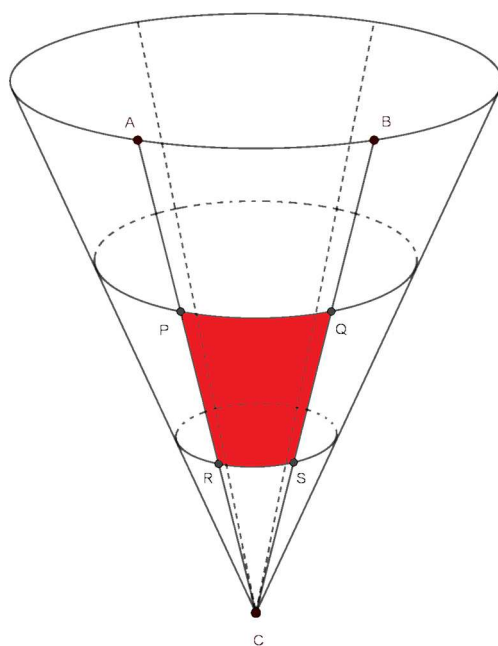
$$A = \sqrt{\frac{3}{2}x\left(\frac{3}{2}x - x + 2\right)\left(\frac{3}{2}x - x\right)\left(\frac{3}{2}x - x - 2\right)} = \sqrt{\frac{3x^2(x^2-16)}{16}} = x\sqrt{\frac{3(x^2-16)}{16}}.$$

Si osserva che $\frac{3(x^2-16)}{16}$, con le nostre ipotesi, è un quadrato perfetto solo per $x = 28$.

Risposta 2628

Problema 11 – Cono rovesciato**55 punti**

Un bacino idrico, a forma di cono rovesciato (vedi figura) è stato pitturato a quadrilateri (mistilinei) in questo modo: si sono tracciati 2 cerchi (oltre a quello di base) su piani paralleli alla base in modo da dividere in 3 parti di uguale “spessore” il cono stesso. Si è poi suddivisa la superficie laterale in 6 triangoli (mistilinei) congruenti tracciando opportunamente sei linee di apotema. Uno di questi in figura è ABC. Si sa che il raggio della base del cono è 5m e l'altezza misura 12m. Calcolare l'area (ovviamente in m^2) del trapezio mistilineo RSQP colorato in figura (a metà fra base e vertice del cono). Porre, se servisse per i calcoli, $\pi = 3,14$. Dare come risposta il numero formato dalle prime quattro cifre del risultato omettendo l'eventuale virgola.



Soluzione:

La lunghezza dell'apotema (ad es. AC) sarà, in metri: $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Calcoliamo la superficie laterale del cono sulla base del quale giace PQ. Le sue dimensioni lineari saranno $2/3$ di quelle del cono maggiore. Avremo raggio di base lungo $\frac{10}{3}m$, apotema di lunghezza

$$\frac{26}{3}m, \text{ da cui superficie laterale} = 3,14 \times \frac{10}{3} \times \frac{26}{3} = \frac{816,4}{9} m^2 = 90,71 \bar{m}^2.$$

Calcoliamo ora la superficie laterale del cono più piccolo, sulla base del quale giace RS. Le sue dimensioni lineari saranno $1/3$ di quelle del cono maggiore, quindi metà di quelle del cono precedente. La sua superficie laterale misurerà quindi $1/4$ di quella di quest'ultimo, cioè $22,67 \bar{m}^2$.

L'area richiesta del trapezio mistilineo varrà dunque $\frac{90,71 \bar{m}^2 - 22,67 \bar{m}^2}{6} = 11,338 \bar{m}^2$. **Risposta** 1133

Problema 12 – Formica e rugby

55 punti

Una formichina si avvicina ad un pallone da rugby a forma di un ellissoide perfetto con i semiassi lunghi rispettivamente 3, 4, 5.

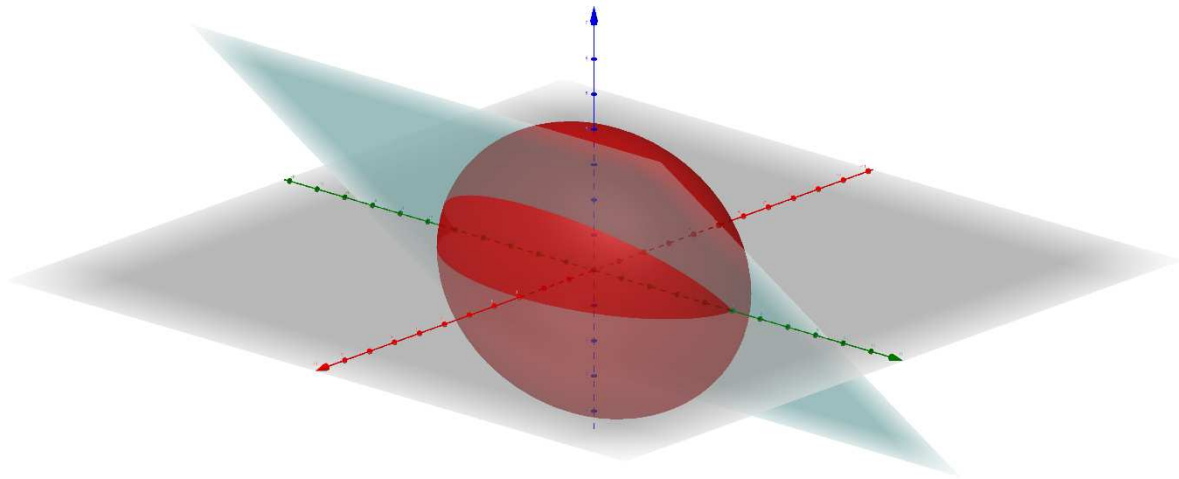
Ci sale sopra e lo percorre di un giro completo lungo un percorso che è l'intersezione del pallone con il piano passante per il semiasse lungo 5, perpendicolare al piano su cui giacciono gli altri due semiassi, e che biseca l'angolo (retto) formato da questi ultimi due.

Calcolare la lunghezza del percorso della formichina. Si usi all'uopo $\pi = 3,14$ e la formula (di Ramanujan) $L \approx \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)} \right]$ per la lunghezza del percorso ellittico, dove a e b

sono appunto le misure dei semiassi della conica in questione. Dare come risposta il numero composto dalle prime quattro cifre del risultato, omettendo l'eventuale virgola.

Soluzione:

Figura esemplificativa:



L'equazione di un ellissoide, riferito agli assi, nello spazio tridimensionale è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \text{ Nel nostro caso, per realizzare la figura, possiamo scrivere } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Un piano passante per l'origine $O(0,0,0)$ degli assi ha equazione $ax + by + cz = 0$.

Un piano passante per O e perpendicolare al piano xz (quindi passante per l'asse y) ha equazione $ax + bz = 0$.

Nel nostro caso avremo $a = b$ (oppure $a = -b$), da cui possiamo scrivere $x + z = 0$.

L'ellisse voluta, riferita al piano di giacenza, avrà un semiasse lungo 5 e l'altro, ricavato dai due semiassi dell'ellissoide sul piano xz che caratterizzano pure l'ellisse intersezione del solido col piano suddetto. Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \\ x = z \end{cases}, \text{ da cui: } x = z = 12/5 = 2,4.$$

Non ci resta che applicare la formula suggerita:

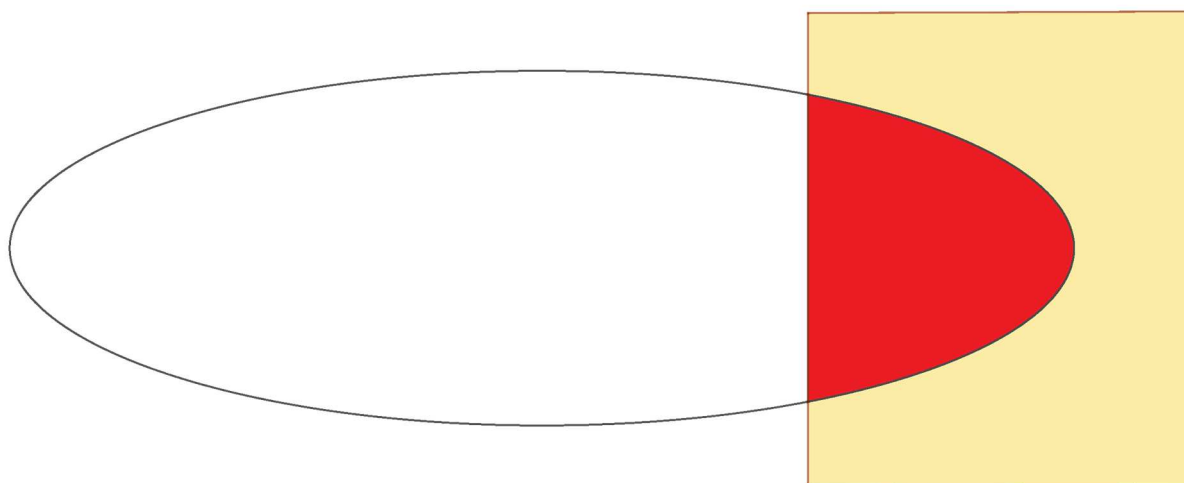
$$L \approx 3,14 \left[3(2,4 + 4) - \sqrt{(7,2 + 4)(2,4 + 12)} \right] = 3,14 \left[19,2 - \sqrt{161,28} \right] \approx 20,41123424.$$

Risposta 2041

Problema 13 – Tavola da surf

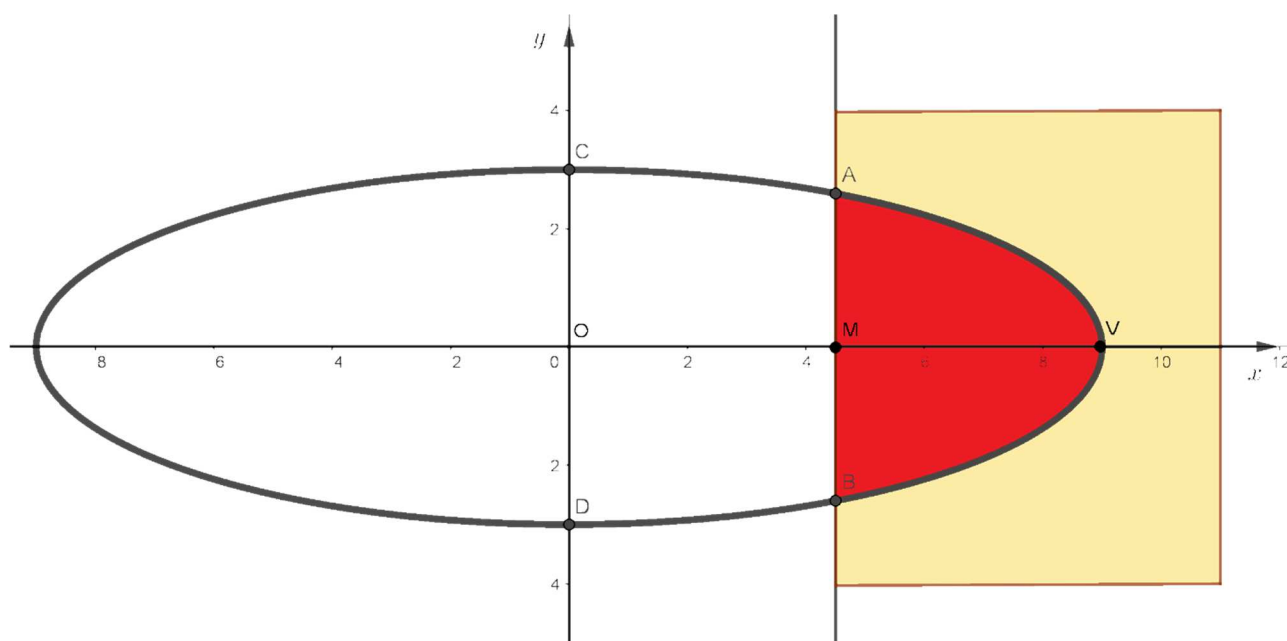
55 punti

Carletto si è costruito una tavola da surf. La modella come un'ellisse di semiassi lunghi (in decimetri) rispettivamente 9 e 3. La appoggia per un quarto della sua lunghezza su un'assicella rettangolare (vedi figura). Si chiede: quanto vale (in dm^2) l'area della tavola appoggiata (di colore rosso in figura)? Porre $\pi = 3,1416$ e $\sqrt{3} = 1,732$. Dare come risposta il numero di quattro cifre del risultato omettendo l'eventuale virgola.



Soluzione:

Riferiamo il tutto ad un sistema di assi cartesiani (vedi figura sottostante).



L'equazione cartesiana dell'ellisse con le caratteristiche date e centrata sugli assi è $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Possiamo scriverla come $y^2 = \frac{81-x^2}{9}$. La curva con ordinate positive si può individuare come

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{81-x^2}.$$

Per trovare l'area della lunetta richiesta calcoliamo l'area della parte MVA, in figura, moltiplicandola poi per due. Otteniamo: $Area = 2 \cdot \frac{1}{3} \int_{4,5}^9 \sqrt{81-x^2} dx$.

Notiamo che l'integrale da calcolare è del tipo "notevole":

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + c. \text{ Abbiamo quindi}$$

$$Area = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left[81 \arcsin \frac{x}{9} + x \sqrt{81-x^2} \right]_{4,5}^9 = \frac{1}{3} \left[81 \arcsin 1 - 81 \arcsin \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \sqrt{81 - \frac{81}{4}} \right]_{4,5}^9. \text{ Quindi}$$

$$Area = \frac{1}{3} \left(81 \cdot \frac{\pi}{2} - 81 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{81}{4} \sqrt{3} \right) = 27 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right). \text{ Con le ipotesi del quesito:}$$

$$Area = 16,5834.$$

Risposta 1658

Problema 14 – Calcolo enigmatico 2026

65 punti

$$ABA - CDE = DEB$$

$$\times \quad \quad \quad : \quad \quad \quad +$$

$$DD \times F = CDE$$

$$EFGHA : DD = ABA$$

A lettera uguale corrisponde cifra uguale (e a lettera diversa cifra diversa).

La prima cifra non è mai lo zero (come semplicità comanda).

Quale numero corrisponde alla stringa AFGB?

Soluzione:

Dalla moltiplicazione verticale si evince che la coppia ordinata (A,D) può essere solo una fra (2,6), (4,6), (8,6) oppure (5,3).

Utilizzando la divisione verticale si evince che è $A = 5$ e $D = 3$. Infatti, se fosse $D = 6$ e $A = 2$, otterremmo $66 \times F = C6E$, da cui $F > 2$. Quindi $F = 3 \Rightarrow 66 \times 3 = 198$, non conforme.

Se $F = 4 \Rightarrow 66 \times 4 = 264$ con $C = A$, non accettabile.

Se $F = 8 \Rightarrow 66 \times 8 = 528$ con $D = A$, non accettabile.

Troviamo quindi **A = 5** e **D = 3**.

Dalla somma verticale ora si deduce che B ed E possono assumere le coppie di valori 1,4 o 7,8 oppure 6,9 (in ordine da stabilire). Sarà **B = 4** ed **E = 1** da cui **C = 2** come si può facilmente verificare provando a risolvere la suddetta somma con gli altri valori di B ed E.

Facilmente si trovano ora i valori delle altre lettere risolvendo la moltiplicazione e la divisione verticali:

$$543 \times 33 = 17985 \text{ e } 231 : 33 = 7.$$

La soluzione (unica) è quindi: **A = 5, B = 4, C = 2, D = 3, E = 1, F = 7, G = 9, H = 8**.

Risposta **5794**

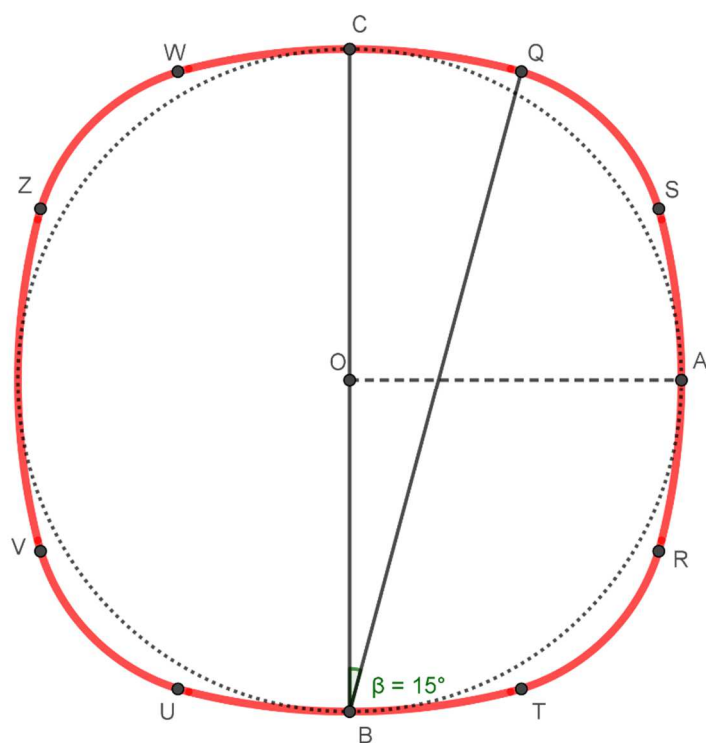
Problema 15 – Icona dello smartphone**65 punti**

Sui nostri cellulari sono presenti numerose icone sulla schermata principale/home screen. Una forma comune è quella illustrata in figura 1. Immaginiamo che il suo perimetro sia prodotto da 8 archi di circonferenze a quattro a quattro uguali: in figura 2 sono congruenti fra loro gli archi (indicati coi loro estremi) WQ, SR, TU e VZ. Analogamente lo sono QS, RT, UV e ZW. Se il suddetto perimetro è una curva chiusa senza punti angolosi, la circonferenza inscritta ha raggio 3 (OA in fig. 2 con diametro CB perpendicolare ad OA), il raggio di quella che genera WQ ha raggio 6, sapendo che l'angolo $\widehat{CBQ}$ misura 15° , quanto vale il perimetro dell'icona? Dare come risposta il numero formato dalle prime quattro cifre del risultato omettendo l'eventuale virgola utilizzando, nel caso, approssimazioni con almeno quattro cifre decimali.

Fig. 1



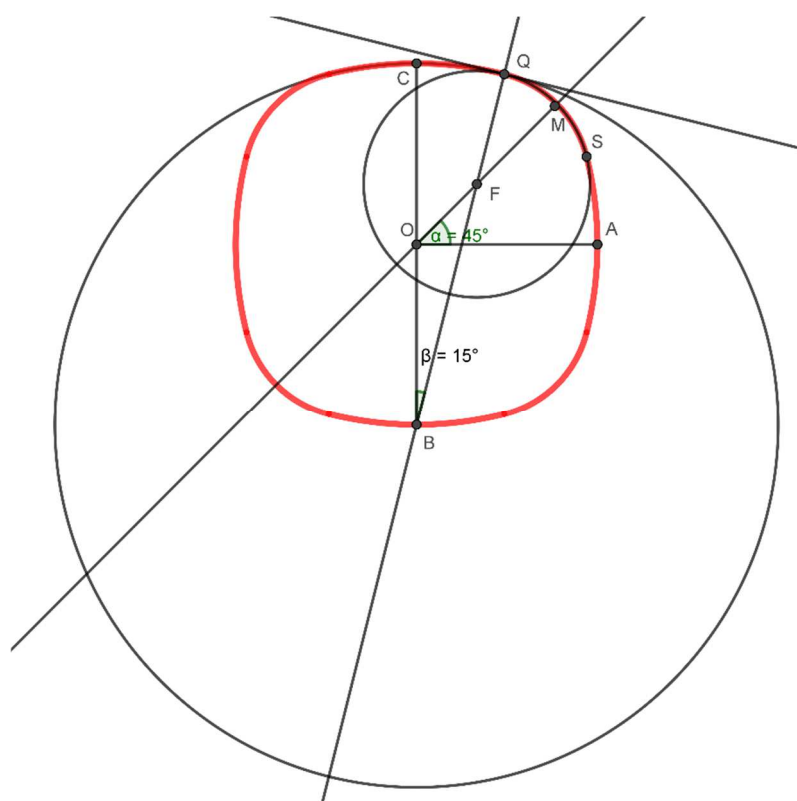
Fig. 2



Soluzione:

Poiché la linea perimetrale non ha punti angolosi, la retta tangente in Q è comune ad entrambe le circonferenze di raggi BQ ed FQ . Vedi figura 3.

Fig. 3



Poiché $\widehat{CBQ} = 15^\circ$, $\widehat{AOB} = 90^\circ$ otteniamo $\widehat{OFB} = \widehat{QFM} = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.

Ora la lunghezza della circonferenza “grande”, di raggio 6, vale 12π , quindi la somma della lunghezza dei suoi quattro archi sarà $2\pi \times 6 \times \frac{30}{360} \times 4 = 4\pi$. Infatti l’arco di estremi CQ è solo la metà di un arco individuato dalla suddetta circonferenza.

Ci serve ora il raggio della circonferenza “minore” di centro F.

Calcoliamo $\overline{BF}$. Per il teorema dei seni: $\frac{\overline{BF}}{\sin 135^\circ} = \frac{\overline{OB}}{\sin 30^\circ}$, $\frac{\overline{BF}}{\sqrt{2}/2} = \frac{3}{1/2}$, $\overline{BF} = 3\sqrt{2}$.

Avremo: $\overline{QF} = 6 - 3\sqrt{2}$, da cui Lunghezza circonferenza minore = $2\pi(6 - 3\sqrt{2})$

La somma delle lunghezze dei quattro archi relativi sarà $\frac{2\pi(6 - 3\sqrt{2})}{6} \cdot 4 = 4\pi(2 - \sqrt{2})$. Infine:

Perimetro icona = $4\pi - 4\pi\sqrt{2} + 8\pi = \pi(12 - 4\sqrt{2}) \cong 19,92758$.

Risposta 1992

Problema 16 – 2026

70 punti

Il direttore artistico dell’agenzia di design per cui lavori vuole realizzare un opuscolo per omaggiare l’anno 2026 e ti chiede di scrivere con uno stile del tutto particolare tutti i numeri da 1 a 2026 (estremi compresi). Per dare un tocco di classe, tutti e soli i numeri che sono multipli di 25 dovranno essere scritti rigorosamente in cifre romane. Ti metti subito al lavoro: scrivi 1, 2, 3... 24, poi ti fermi e inserisci XXV. Poi continui, 26... 49 e inserisci L. Vai avanti così, con santa pazienza, fino al fatidico numero 2026. Una volta finito il lavoro ti chiedi: quante volte hai scritto la cifra zero?

Soluzione:

Consideriamo dapprima i numeri che contengono tre zeri: sono 1000 e 2000 ma non vanno conteggiati perché sono entrambi multipli di 25.

Consideriamo ora quelli che presentano due zeri:

- due zeri finali non sono ammessi (es: 1200) perché portano a numeri multipli di 25;
- zeri in posizione decine e centinaia ($x00y$): x può valere 1 o 2, y tutte le cifre da 1 a 9. I numeri di questa tipologia sono dunque $2 \times 9 = 18$, ognuno con 2 zeri, per un totale di 36 zeri;
- zeri in posizione decine e unità ($x0y0$): le possibilità sono 1010, 1020, 1030, 1040, 1060, 1070, 1080, 1090, 2010, 2020; sono 10 numeri, ognuno con 2 zeri, per un totale di 20 zeri.

In totale, per i numeri contenenti due zeri dobbiamo conteggiare $36 + 20 = 56$ zeri.

Consideriamo infine i numeri che presentano solo uno zero:

- numeri a due cifre del tipo $x0$: sono 8 perché x può variare da 1 a 9 a eccezione di 5
- numeri a tre cifre del tipo $x0y$: x e y possono entrambi variare da 1 a 9, per un totale di $9^2 = 81$ possibilità
- numeri a tre cifre del tipo $xy0$: x può variare da 1 a 9, y da 1 a 9 a eccezione di 5, per un totale di $9 \times 8 = 72$ possibilità
- numeri a quattro cifre del tipo $1xy0$, dove x può variare da 1 a 9, y da 1 a 9 a eccezione di 5, per un totale di $9 \times 8 = 72$ possibilità. Si noti che la cifra delle migliaia deve essere necessariamente 1 altrimenti il numero potrebbe superare 2026
- numeri a quattro cifre del tipo $1x0y$: x e y possono entrambi variare da 1 a 9, per un totale di $9^2 = 81$ possibilità
- numeri a quattro cifre del tipo $10xy$: x e y possono entrambi variare da 1 a 9, bisogna però escludere 1025 e 1075 che sono multipli di 25; in totale di $9^2 - 2 = 79$ possibilità
- numeri a quattro cifre del tipo $20xy$: vanno conteggiati 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2021, 2022, 2023, 2024, 2026, 14 possibilità.

In totale, per i numeri contenenti un unico zero dobbiamo conteggiare $8+81+72+72+81+79+14=407$ zeri.

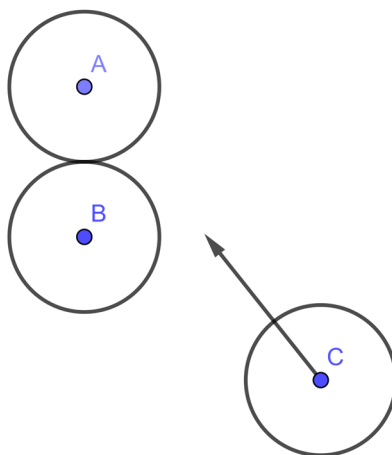
Il numero totale di zeri sarà dunque $407+56=463$.

Risposta 0463

Problema 17 – Tre biglie (a mo' di curling)

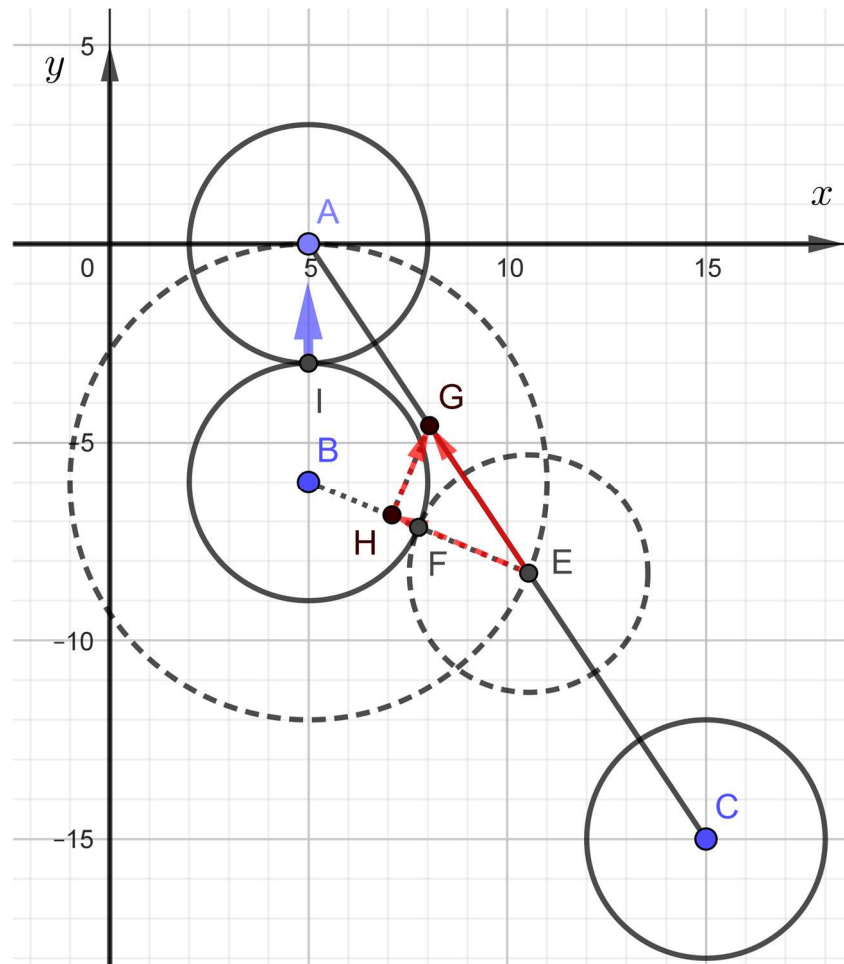
75 punti

Su una superficie piana vi sono tre biglie uguali, perfettamente sferiche, di raggio 3 come in figura. I centri sono A, B e C. La biglia di centro C viene spinta con velocità (costante) di modulo v verso A, senza attrito, come descritto dal disegno. Essa colpisce la biglia di centro B la quale, a sua volta, spinge la biglia di A. Si chiede quale velocità (scalare) acquista quest'ultima dopo lo scontro descritto. Si interpreti l'azione come un movimento di cerchi, di centri A, B, C, sul piano cartesiano con coordinate A(5,0), B(5, -6), C(15, -15). Si ponga $v = \sqrt{13}$. Si dia come risposta il numero formato dalle prime quattro cifre significative del risultato omettendo l'eventuale virgola.



Soluzione:

Fig. 1

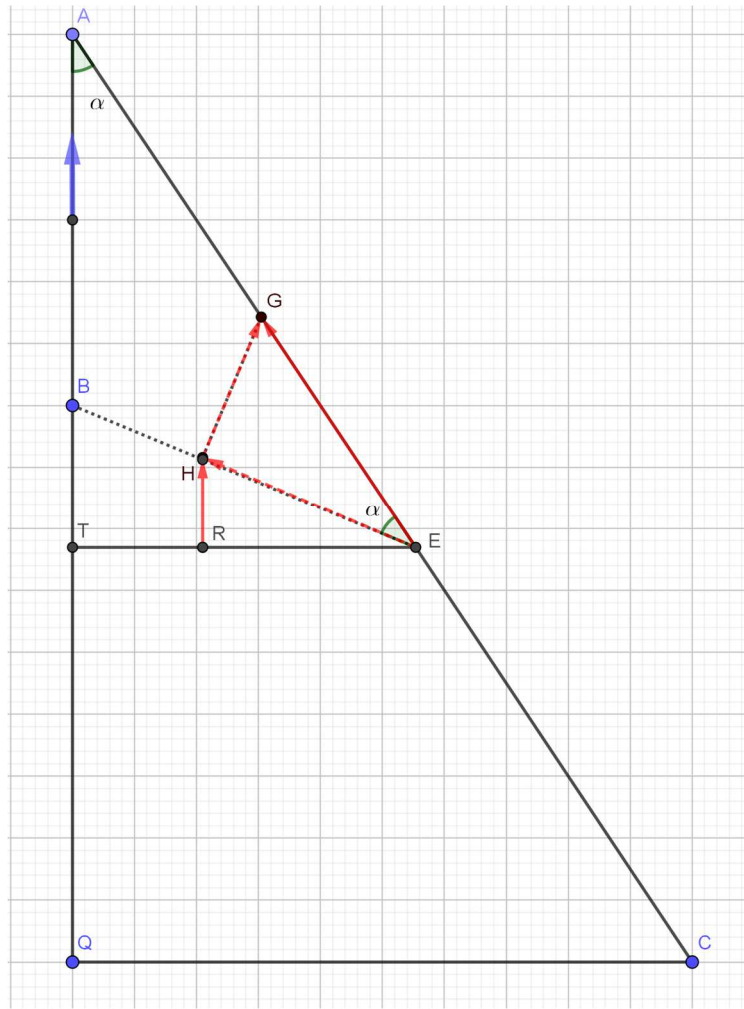


In figura 1 è rappresentato l'istante in cui il cerchio di C colpisce il cerchio di B. Per trovare il nuovo centro E ("successore" di C) si è intersecata la circonferenza di raggio 6 con il segmento AC individuato da $\vec{v}$. Il vettore $\overrightarrow{EG}$ raffigura il vettore velocità (costante). EH e HG descrivono le sue componenti.

Vediamo ora quanto vale la componente "verticale" di EH, responsabile del movimento del cerchio di centro A.

Per chiarezza riferiamoci alla figura 2 seguente.

Fig. 2



Tracciamo il triangolo rettangolo QCA (cateti paralleli/perpendicolari agli assi coordinati) con $Q(5, -15)$. Tracciamo pure il segmento TE parallelo a QC. Il triangolo ABE è isoscele, quindi con angoli alla base congruenti (in figura α). Tracciamo il segmento HR perpendicolare a TE. La lunghezza del segmento HR è il valore richiesto dal problema, essendo essa uguale a quella del modulo del vettore “efficace” per il movimento del cerchio di centro A, come accennato sopra.

Abbiamo: $\overline{GH} = v \sin \alpha = \sqrt{13} \sin \alpha$, $\overline{EH} = v \cos \alpha = \sqrt{13} \cos \alpha$.

In particolare: $\overline{HR} = \overline{EH} \sin \hat{T}EB = \overline{EH} \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = \overline{EH} \cos 2\alpha = \overline{EH} (2\cos^2 \alpha - 1)$.

Ora si trova che $\sin \alpha = \frac{\overline{QC}}{\overline{AC}} = \frac{10}{\sqrt{15^2 + 10^2}} = \frac{10}{5\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ e $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Infine: $\overline{HR} = \sqrt{13} \cos \alpha (2\cos^2 \alpha - 1) = \sqrt{13} \frac{3\sqrt{13}}{13} \left(2 \frac{9}{13} - 1 \right) = 3 \frac{18-13}{13} = \frac{15}{13} \cong 1,1538$.

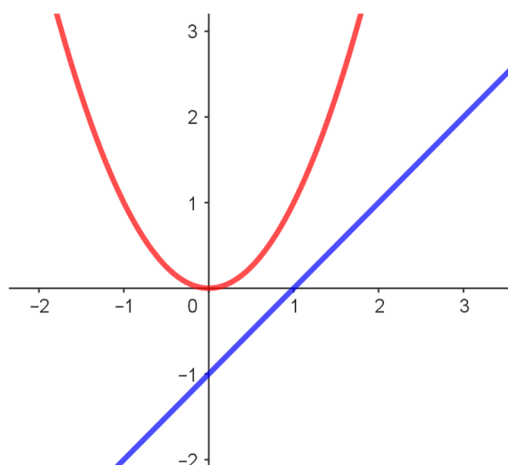
Risposta 1153

Problema 18 – Distanza curve

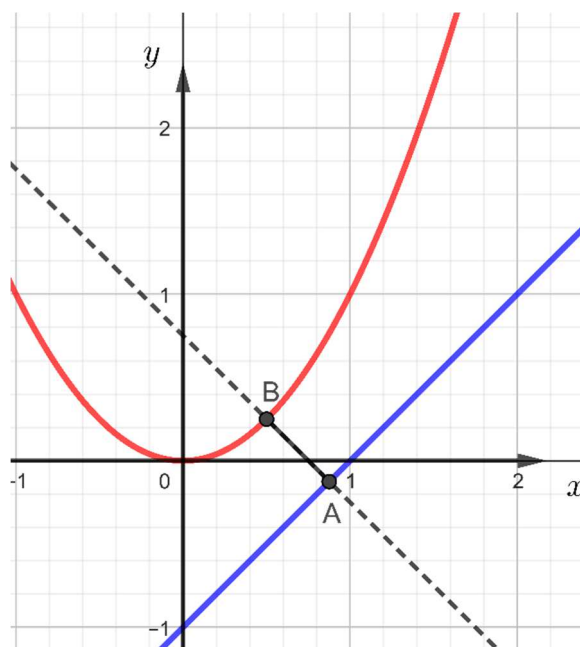
80 punti

Abbiamo due curve sul piano cartesiano di equazioni rispettivamente $y = x^2$ e $y = x - 1$. Vogliamo sapere qual è la distanza minima fra di loro. Dare come risposta il numero formato dalle prime 4 cifre dopo la virgola del risultato.

Ecco una riproduzione grafica.



Soluzione:



La distanza minima sarà pari alla lunghezza di un segmento perpendicolare ad entrambe le curve, il quale sarà quindi individuato dall'intersezione di una retta con le curve stesse, perpendicolare alle loro tangenti.

Osservando la figura si evince che il tutto può avvenire nella zona di ascissa compresa fra 0 e 2.

Operiamo così.

Equazione della retta generica perpendicolare alla retta $y = x - 1$:

$$y = -x + k \text{ con } k \text{ numero reale.}$$

Le intersezioni con le curve si trovano risolvendo i sistemi:

$$\begin{cases} y = -x + k \\ y = x - 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y = -x + k \\ y = x^2 \end{cases}.$$

$$\text{Dal primo si ricava } \begin{cases} x = \frac{k+1}{2} \\ y = \frac{k-1}{2} \end{cases} \quad e \text{ dal secondo } \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{1+4k}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{1+4k} + 2k}{2} \end{cases}.$$

Consideriamo quindi i punti $A\left(\frac{k+1}{2}, \frac{k-1}{2}\right)$ e $B\left(\frac{-1 + \sqrt{1+4k}}{2}, \frac{1 - \sqrt{1+4k} + 2k}{2}\right)$.

Vogliamo minimizzare la lunghezza di AB. Consideriamo:

$$\overline{AB}^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4k} - k - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2k + 1 - \sqrt{1+4k} - k + 1}{2}\right)^2. \text{ Si ottiene:}$$

$$\overline{AB}^2 = \frac{2k^2 + 16k + 8 - 4(k+2)\sqrt{1+4k}}{4}. \text{ Consideriamo solo } k^2 + 8k + 4 - 2(k+2)\sqrt{1+4k} = f(k).$$

Determiniamo il minimo di $f(k)$. Troviamo:

$$\frac{f'(k)}{2} = k + 4 - \frac{6k+5}{\sqrt{1+4k}}. \text{ Poniamo } f'(k) = 0. \text{ Troviamo } (4k-3)(k^2+3) = 0 \text{ con } k \geq -\frac{5}{6}.$$

Infine: $k = \frac{3}{4}$, soluzione accettabile. Otteniamo: $A\left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Infine:

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(-\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{3}{8}\sqrt{2} \cong 0,530330085.$$

Risposta 5303

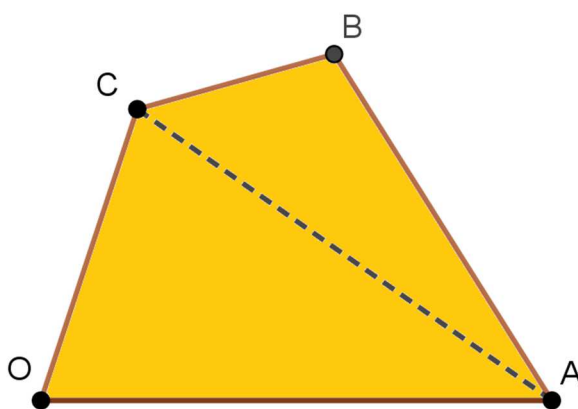
Problema 19 – Quadrilatero massimo

80 punti

Abbiamo un quadrilatero convesso OABC. I suoi lati misurano rispettivamente, in metri, $\overline{OA} = 5$, $\overline{AB} = 4$, $\overline{OC} = 3$ e $\overline{CB} = 2$. Quanto è lunga, in metri, la diagonale AC nel caso di area massima del quadrilatero stesso? Dare come risposta il numero formato dalle prime quattro cifre (significative) del risultato omettendo l'eventuale virgola.

Soluzione:

Riferiamoci alla figura seguente, la quale dà un esempio del quadrilatero in questione.



Congiungiamo A con C. L'area del nostro quadrilatero sarà la somma delle aree dei due triangoli OAC e ABC. Utilizziamo all'uopo la formula di Erone. Poniamo $\overline{AC} = x$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \text{Area di OAC} &= \sqrt{\frac{x+3+5}{2} \left(\frac{x+8}{2} - 5 \right) \left(\frac{x+8}{2} - 3 \right) \left(\frac{x+8}{2} - x \right)} = \sqrt{\frac{x+8}{2} \cdot \frac{x-2}{2} \cdot \frac{x+2}{2} \cdot \frac{8-x}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(x^2 - 4)(64 - x^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Area di ABC} &= \sqrt{\frac{x+2+4}{2} \left(\frac{x+6}{2} - 4 \right) \left(\frac{x+6}{2} - 2 \right) \left(\frac{x+6}{2} - x \right)} = \sqrt{\frac{x+6}{2} \cdot \frac{x-2}{2} \cdot \frac{x+2}{2} \cdot \frac{6-x}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(x^2 - 4)(36 - x^2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Area di OABC} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{(x^2 - 4)(64 - x^2)} + \sqrt{(x^2 - 4)(36 - x^2)} \right).$$

Per massimizzare la suddetta area consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 4)(64 - x^2)} + \sqrt{(x^2 - 4)(36 - x^2)} = \sqrt{-x^4 + 68x^2 - 256} + \sqrt{-x^4 + 40x^2 - 144}$$

e cerchiamone il massimo. Otteniamo:

$$f'(x) = \frac{-4x^3 + 136x}{2\sqrt{-x^2 + 68x - 256}} + \frac{-4x^3 + 80x}{2\sqrt{-x^2 + 40x - 144}} = 2 \left(\frac{-x^3 + 34x}{\sqrt{-x^2 + 68x - 256}} + \frac{-x^3 + 20x}{\sqrt{-x^2 + 40x - 144}} \right),$$

funzione da massimizzare. Consideriamo solo la parte in parentesi. Otteniamo:

$$\frac{-x^3 + 34x}{\sqrt{-x^2 + 68x - 256}} + \frac{-x^3 + 20x}{\sqrt{-x^2 + 40x - 144}} \geq 0 \text{ per}$$

$$(-x^3 + 34x)\sqrt{-x^2 + 40x - 144} + (-x^3 + 20x)\sqrt{-x^2 + 68x - 256} \geq 0.$$

Poiché, per motivi di carattere geometrico, è $x > 0$ (ed anche $x \leq 6$), possiamo considerare

$$(34 - x^2)\sqrt{-x^2 + 40x - 144} + (20 - x^2)\sqrt{-x^2 + 68x - 256} \geq 0. \text{ Cioè:}$$

$$(34 - x^2)\sqrt{-x^2 + 40x - 144} \geq (x^2 - 20)\sqrt{-x^2 + 68x - 256}.$$

Dopo calcoli un pochino laboriosi otteniamo:

$$161x^4 - 4648x^2 + 16016 \leq 0. \text{ Ponendo } x^2 = y \text{ si ha } 161y^2 - 4648y + 1016 \leq 0.$$

Tenendo conto delle condizioni geometriche ed algebriche del caso, otteniamo

$$y = \frac{2324 \pm \sqrt{5400976 - 2578576}}{161} = \frac{2324 \pm \sqrt{2822400}}{161} = \frac{2324 \pm 1680}{161}, \text{ da cui}$$

$$y_1 = \frac{644}{161} = 4 \text{ e } y_2 = \frac{4004}{161} = 24,869565...$$

Sempre tenendo conto delle condizioni geometriche, deduciamo che il massimo dell'area del

triangolo in questione si ha per $x = \sqrt{\frac{4004}{161}} \cong 4,986939...$

Risposta 4986

Problema 20 – Porticato

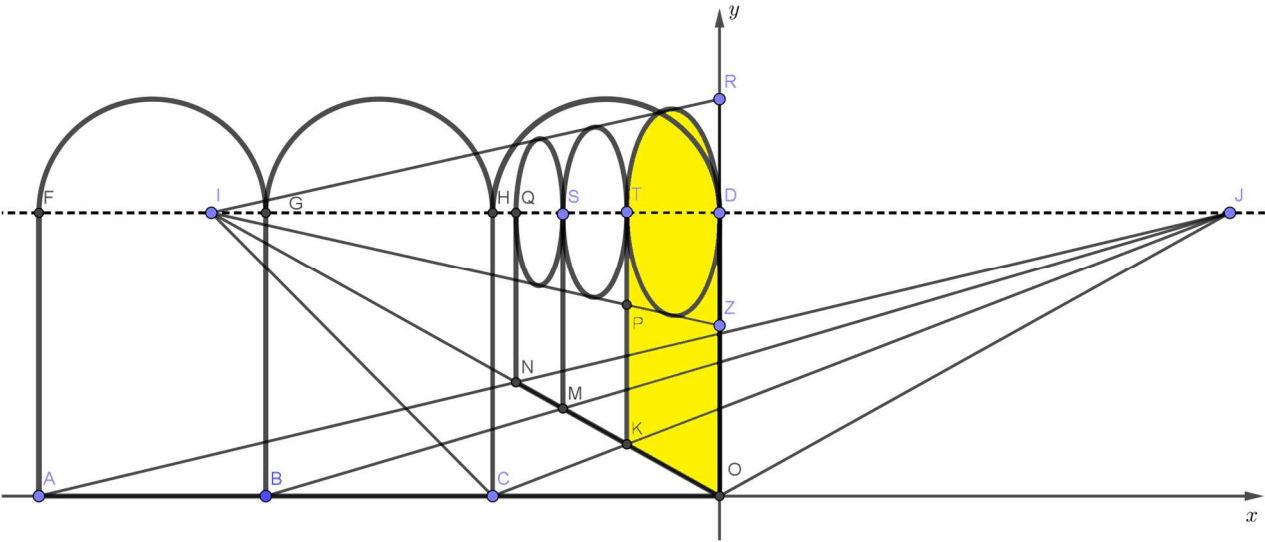
80 punti

A Moncalvo (Asti) vi è un porticato (vedi figura 1) con archi a tutto sesto sopra colonne verticali. Immaginiamo che un osservatore si trovi con gli occhi all'altezza delle colonne (vedi figura 2, linea tratteggiata) e in un'angolatura, come in fig. 2, con punti all'infinito in I e J. Consideriamo tre arcate (in figura vista frontale AODF e NODH in vista prospettica). Trascurando lo spessore delle colonne con i dati che verranno forniti, calcolare l'area della figura mistilinea in prospettiva che rappresenta la visione dell'osservatore suddetto in relazione solamente alla **prima delle tre arcate citate** (di base OK, colorata in figura). Si supponga che gli archi osservati siano archi di ellissi con centro nei punti medi di DT, TS e SQ rispettivamente. Si immagini il tutto riferito ad un sistema di assi cartesiani con le coordinate date in calce alla figura 2. Dare come risposta il numero formato dalle prime quattro cifre del risultato omettendo l'eventuale virgola, ponendo, qualora si utilizzasse, $\pi = 3,14$.

Fig. 1



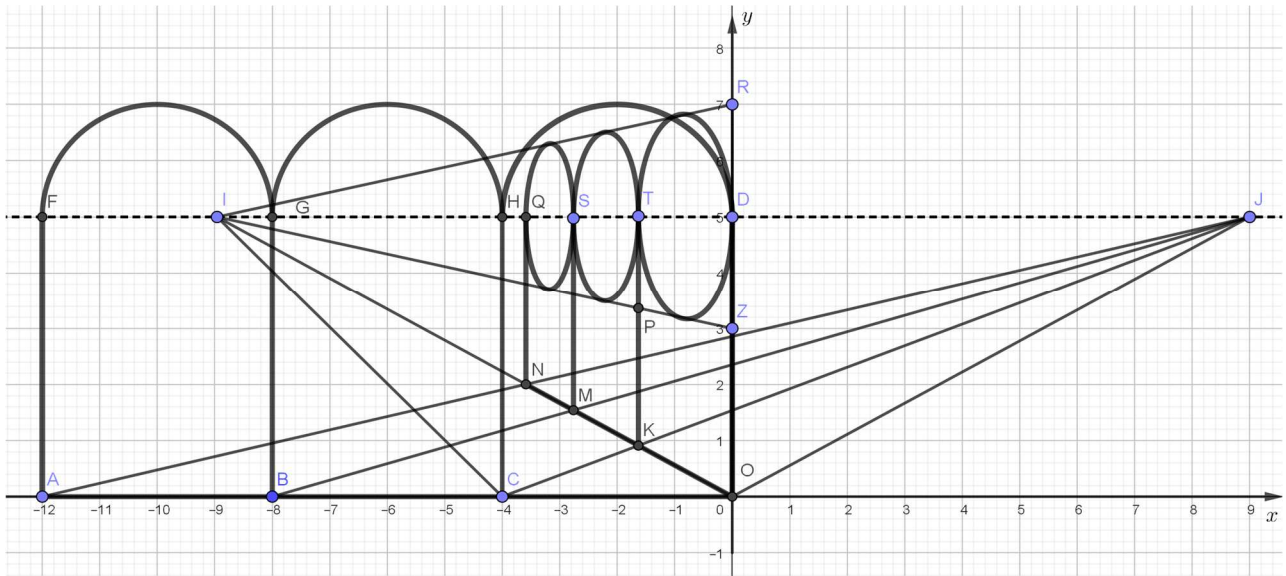
Fig. 2



Dati:

$A(-12,0)$, $B(-8,0)$, $C(-4,0)$, $O(0,0)$, $F(-12,5)$, $G(-8,5)$, $H(-4,5)$, $Z(0,3)$, $D(0,5)$, $R(0,7)$, $I(-9,5)$, $J(9,5)$.

Soluzione:



La figura in questione è formata dal trapezio KODT e dalla metà dell'ellisse di asse minore TD.

Le basi del trapezio sono OD e TK, l'altezza TD. Il punto K è l'intersezione delle rette di IO e CJ.

La retta di IO ha coefficiente angolare $-\frac{5}{9}$ e passa per l'origine O. Quindi $y = -\frac{5}{9}x$.

Retta di CJ: coeff. ang. $m = \frac{5}{13}$ e passa per C(-4,0), da cui $y = \frac{5}{13}x + \frac{20}{13}$.

Punto K: $\begin{cases} y = \frac{5}{13}x + \frac{20}{13} \\ y = -\frac{5}{9}x \end{cases}$. Si ha $K\left(-\frac{18}{11}, \frac{10}{11}\right)$. Si trova quindi $T\left(-\frac{18}{11}, 5\right)$, da cui $\overline{TK} = \frac{45}{11}$.

Essendo $\overline{TD} = \frac{18}{11}$, abbiamo Area trapezio KODT = $\left(5 + \frac{45}{11}\right) \cdot \frac{18}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{900}{121}$.

Lunghezza semiasse minore dell'ellisse scelto: $\frac{9}{11}$.

Per la lunghezza del semiasse maggiore calcoliamo la media aritmetica delle lunghezze dei segmenti DZ e TP.

$m(PZ) = -\frac{2}{9}$, da cui retta per PZ: $y = -\frac{2}{9}x + 3$. Punto P:

$\begin{cases} y = -\frac{2}{9}x + 3 \\ x = -\frac{18}{11} \end{cases}$, da cui $P\left(-\frac{18}{11}, \frac{37}{11}\right)$. Otteniamo $\overline{TP} = 5 - \frac{37}{11} = \frac{18}{11}$.

$$\text{Quindi semiasse maggiore} = \left(2 + \frac{18}{11}\right) \frac{1}{2} = \frac{20}{11}.$$

$$\text{Area lunetta (semiarea ellisse)} = \frac{20}{11} \cdot \frac{9}{11} \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{90}{121} \pi.$$

$$\text{Area richiesta} = \frac{90}{121} \pi + \frac{900}{121} = \frac{90\pi + 900}{121} = 9,773553719...$$

Risposta 9773